Análisis mediante ecuaciones nodales (nudos)

Si en un circuito se tienen "n" nudos y "r" ramas, se tienen "$2r$" incógnitas (las tensiones y intensidades de rama) y se tienen "r" ecuaciones de rama independientes por lo que se necesitan otras "r" ecuaciones **independientes**. Para elegir estas "r" ecuaciones independientes se dispone de las siguientes ecuaciones:

- "n" ecuaciones nodales (primera ley de Kirchoff).
- "l" ecuaciones circulares (segunda ley de Kirchoff).

En principio harían falta todas ellas, pero se verá que se puede resolver el circuito con solamente un conjunto de ellas.

Consideremos un circuito con fuentes de continua y resistencias, representado en la Figura 1.

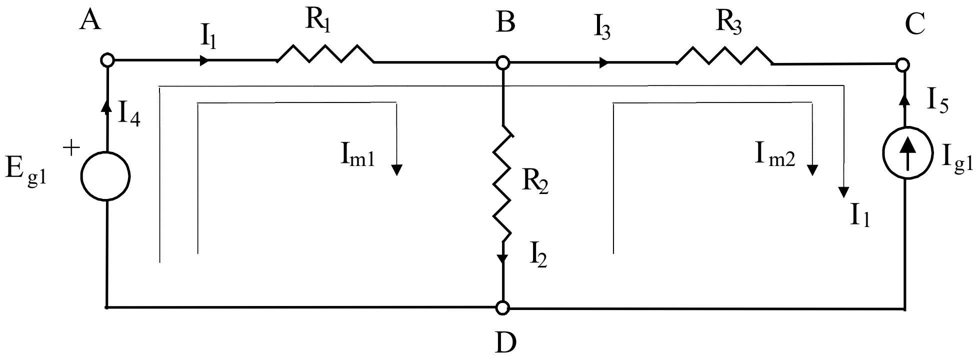

Figura 1. Circuito con fuentes de continua y resistencias.

En lo relacionado con las <u>*ecuaciones nodales*</u> se utiliza el primer axioma de Kirchoff:

$$A) - I_4 + I_1 = 0$$

$$B) - I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$C) - I_3 - I_5 = 0$$

$$D)\ I_4 - I_2 + I_5 = 0$$

Si sumamos resulta: $0 = 0$, entonces una de las ecuaciones es linealmente dependiente de las otras.

Es decir, en la elección de las ecuaciones nodales se consideran **las de todos los nudos menos uno**.

Es decir, se tienen $n - 1$ ecuaciones.

En lo relacionado a las *ecuaciones de rama* se tienen r ecuaciones.

Entonces se tienen $2 - r$ **incógnitas** y $(n-1) + \big(r - (n-1)\big) + r = 2 \cdot r$ **ecuaciones**.

Consideremos un circuito con solamente fuentes de intensidad de continua y resistencias, representado en la Figura 2.

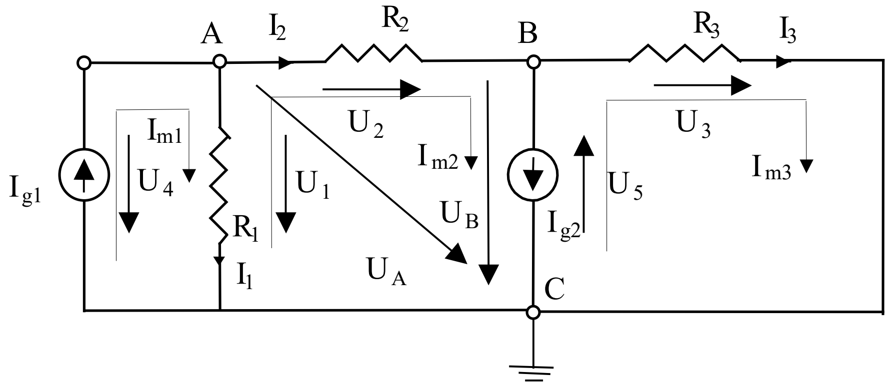

Figura 2. Circuito con fuentes de intensidad y resistencias.

En principio habría que plantear las ecuaciones nodales ($n - 1$cuaciones), las ecuaciones circulares ($r - (n-1)$ ecuaciones) y las ecuaciones de rama (r ecuaciones), pero se va a considerar una forma mas reducida de resolver el circuito.

Se van a considerar todos los nudos menos uno, y se van a definir las tensiones de estos respecto al nudo no considerado, de forma que las tensiones de las ramas son:

$$U_1 = U_A$$

$$U_2 = U_A - U_B$$

$$U_3 = U_B$$

$$U_4 = U_A$$

$$U_5 = -U_B$$

Entonces, para la resolución con *ecuaciones nodales* se consideran las ecuaciones de todos los nudos menos uno.

$$A) - I_{g1} + I_1 + I_2 = 0$$

$$B) - I_2 + I_{g2} + I_3 = 0$$

Sustituyendo para resolver el problema a partir de las tensiones nodales, se tiene:

$$A) - I_{g1} + \frac{1}{R_1} \cdot U_A + \frac{1}{R_2} \cdot (U_A - U_B) = 0$$

$$B) - \frac{1}{R_2} \cdot (U_A - U_B) + I_{g2} + \frac{1}{R_3} \cdot U_B = 0$$

Es decir, nos resultan identidades donde únicamente se va a aplicar la primera ley de Kirchoff a todos los nudos menos uno. Operando, se tiene:

$$A) I_{g1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot U_A - \frac{1}{R_2} \cdot U_B$$

$$B) - I_{g2} = -\frac{1}{R_2} \cdot U_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot U_B$$

Se resuelve esta ecuación y se calculan las tensiones nodales U_A y U_B. A partir de ellas se calculan las tensiones de rama:

$$U_1 = U_A$$

$$U_2 = U_A - U_B$$

$$U_3 = U_B$$

$$U_4 = U_A$$

$$U_5 = -U_B$$

Luego se determinan las intensidades de rama:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U_1$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2} \cdot U_2$$

$$I_3 = \frac{1}{R_3} \cdot U_3$$

$$I_4 = -I_{g1}$$

$$I_5 = -I_{g2}$$

En general se trata de resolver una ecuación matricial de la forma:

$$Y_n \cdot \hat{u}_n = \hat{\imath}_g$$

donde:

- Y_n es una matriz cuadrada de admitancias nodales, de dimensión:
$$(n-1)\cdot(n-1)$$
- $\hat{u}_n$ es un vector columna de las tensiones de nudo, respecto al referencia, de dimensión:
$$(n-1)\cdot 1$$
- $\hat{\imath}_g$ es un vector columna de fuentes de intensidad de nudo, de dimensión:
$$(n-1)\cdot 1$$

Obtenidas las tensiones de nudo, se calculan el resto de las variables.

Determinación de la matriz Y_n.

- Cada elemento de la diagonal Y_n es la suma de las conductancias de las ramas que inciden en el nudo "i"
- Cada elemento fuera de la diagonal Y_{ij} es la suma de las conductancias de las ramas que son comunes a los nudos "i" y "j" con el signo negativo ya que para uno entra y para otro sale.

Determinación del vector columna $\hat{\imath}_g$

Cada elemento de este vector columna $\hat{\imath}_{gj}$ es la suma algebraica de las fuentes de intensidad que inciden en el nudo considerándose positivas si son entrantes en el nudo y negativas en caso contrario. Esto se representa en la Figura 3.

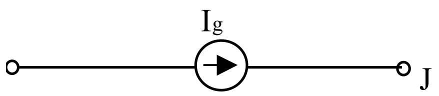

Figura 3. Determinación del signo de una fuente de intensidad en resolución por nudos.

$$\hat{\imath}_{gj} = \cdots + I_g \cdot \ldots$$

Se pueden hacer varias consideraciones:

- Como ya se ha dicho se considera para todos los nudos que la intensidad saliente es positiva (pero se puede establecer lo contrario o establecer criterios distintos para cada nudo), entonces los elementos que están fuera de la diagonal Y_{ij} son todos negativos.
- Todos los elementos de la diagonal Y_{ii} son positivos.
- La matriz es simétrica es decir $Y_{ij} = Y_{ji}$

Determinación del vector columna $\hat{u}_n$

Se define la ley de Ohm de la manera:

$$Y_n \cdot \hat{u}_n = \hat{\imath}_g$$

Con lo que se puede determinar la variable como:

$$\hat{u}_n = {Y_n}^{-1} \cdot \hat{\imath}_g$$

Por definición, la *matriz inversa* se puede determinar de la forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t$$

Donde, la matriz traspuesta. Es la que resulta de cambiar filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Y la *matriz adjunta* se obtiene de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Siendo el adjunto de un elemento el menor complementario con signo positivo o negativo según sea par o impar la suma de su número de fila y su número de columna.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

En general si se tienen fuentes de tensión, se deberán pasar a fuentes de intensidad. Luego se tratarán todas las fuentes como si fuesen independientes con lo que en $\hat{\imath}_g$ se tendrán fuentes de intensidad independientes, fuentes de intensidad dependientes de tensión y fuentes de intensidad dependientes de intensidad.

Para las fuentes de intensidad dependientes de tensión, la tensión de rama se pondrá en función de las tensiones nodales.

Para las fuentes de intensidad dependientes de intensidad:

- Si la rama es resistiva, la intensidad será la tensión de rama dividida por la resistencia de rama. Esta tensión de rama se pondrá en función de las tensiones nodales.
- Si la rama fuese una fuente de intensidad independiente, se tiene un dato y si en cambio fuese una fuente dependiente esta a su vez se pondría en función de las tensiones nodales.

Entonces en $\hat{\imath}_g$ se tienen términos que son fuentes independientes y términos que dependen de las tensiones nodales. Estos últimos términos se pasan a la parte izquierda de la expresión resultando:

$$Y_n' \cdot \hat{u}_n = \hat{\imath}_n'$$

donde:

- Y_n' es la matriz cuadrada de admitancias nodales modificada.
- $\hat{\imath}_n'$ es el vector columna de fuentes de intensidad de nudo modificado.